# 4° Μάθημα:

## 19/3/2019

## Βέλτιστη Ομοιόμορφη Προσέγγιση στο $X_m$:

Έστω το σύνολο διακριτών σημείων $X_m=\{x_i\}_{i=1}^{m}$

$x_1<x_2<x_3<\dots<x_m$

Έστω f ορίζεται στο $X_m$: $f(x_i)$, $i=1,2,\dots,m$

Να βρεθεί η β.ο.π. της f στον $P_n$.

Λύση: Αν $m\le n+1$ τότε $p^*(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία του $X_m$ $E_n(X_m)=0$

Υποθέτουμε ότι $m\ge n+2$

## Χαρακτηρισμός της β.ο.π.:

Θεώρημα: Έστω f ορισμένη, στο σύνολο $X_m$. Το πολυώνυμο $p_n^*\in P_n$ είναι β.ο.π. της f στον $P_n$ αν-ν υπάρχει ένα εναλλασσόμενο σύνολο σημείων του $X_m$ για το σφάλμα $e(x)=f(x)-p_n^*(x)$ αποτελούμενο από $n+2$ σημεία το $X_n$

Θεώρημα: Η β.ο.π. της f ορισμένης στο $X_m$, είναι μοναδική.

$$E_n(X_m)=\|f-p_n^*\|<\|f-p\|,\ \forall p\in P_n,\ p\ne p_n^*$$

Θεώρημα: Έστω $f\in C[a,b]$ τότε υπάρχει ένα σύνολο $X_{n+2}^*$ στο $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$E_n(f[a,b])=E_n(fX_{n+2}^*)=\|f(x)-p_n^*(X_{n+2}^*,x)\|<\|f-p\|$$

$\forall p\ne p_n^*(X_{n+2}^*)$

# Εύρεση της β.ο.π. της $f$ ορισμένης στο $X_{n+2}$ στο $P_n$

Έστω $p(x) \in P_{n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της $f$ στο $X_{n+2}$
$f(x_i) = p(x_i), x_i \in X_{n+2}$. Τότε από τον τύπο Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{w(x)}{x-x_i} \cdot \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}, \quad w(x) = \prod_{j=1}^{n+2} (x - x_j)$$

Ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου, το $p(x)$ είναι $\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$

έστω $p_{n+1} \in P_{n+2}$ τ.ω. $p_{n+2}(x_i) = (-1)^i, i = 1, 2, \ldots, n+2$. Τότε $p_{n+1}$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής της $g(x_i) = (-1)^i$.

$$p_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{w(x)}{x-x_i} \cdot \frac{(-1)^i}{w'(x_i)} \quad \text{με συντ. μεγ όρου} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}.$$

$$w'(x_i) = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_{n+2}) = |w'(x)| (-1)^{n+2-i}$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)} = \frac{\sum (-1)^i}{|w'(x_i)| \cdot (-1)^{n+2-i}} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{|w'(x_i)|} \neq 0$$

Ορίζουμε ως $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}}$ και ως $q$ το πολυώνυμο $q(x) = p(x) - \lambda \cdot p_{n+1}(x)$. Τότε $q \in P_n$

Η συνάρτηση σφάλμα είναι $e(x) = f(x) - q(x) = f(x) - (p(x) - \lambda \cdot p_{n+1}(x))$

$e(x_i) = f(x_i) - (p(x_i) - \lambda \cdot p_{n+1}(x)) = \lambda \cdot (-1)^i \Rightarrow$ Το $X_{n+2}$ είναι εναλλασσόμενο σύνολο για την $e(x) = f(x) - q(x) \Rightarrow q \in P_n$ είναι η β.ο.π. της $f$ στον $P_n$ λόγω μοναδικότητας.

$$E_n(f, X_{n+2}) = |\lambda|$$

## Άσκηση 3. σελ. 45 (Βιβλίο):

Να βρεθεί η β.ο.π. της $f$ ορισμένη στο $X_4$ στον $P_1$.

$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1 | 0 | 1 | 4 |

$X_{4,1} = \{-1, 0, 1\}$

$w'(-1) = (-1-0)(-1-1) = 2$

$w'(0) = (0+1) \cdot (0-1) = -1$

$w'(1) = (1+1) \cdot (1-0) = 2$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{0}{-1} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{-1} + -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Επιπλέον αν $X_{n+2} \in [a,b]$ τότε:

$$E_n(f, X_{n+2}) = \| f - P_n^*(X_{n+2}) \| = \min_{p \in P_n} \max_{x \in X_{n+2}} | f(x) - P_n^*(X_{n+2}, x) |$$

$$\leq E_n(f; [a,b]) = E_n(f; X_{n+2}^*) = \| f - P_n^* \| .$$

- Αν $P_n^*(x+2) = P_n^*(X_{n+2}^*) = P_n^*$, τότε ισχύει η ισότητα
- Αν $P_n^*(x+2) \neq P_n^*(X_{n+2}^*)$, τότε:

$$E_n(f, X_{n+2}) = \| f - P_n^*(X_{n+2}) \| \leq \| f - P_n^* \|$$ επειδή $P_n^*$

είναι άλλο πολυώνυμο και δίνει μεγαλύτερο σφάλμα στο $X_{n+2}$.

Θεώρημα: Έστω $f$ ορισμένη στο σύνολο $X_m$, τότε υπάρχει $X_{n+2}^*$ στο $X_m$, τέτοιο ώστε

$$E_n(f; X_m) = E_n(f; X_{n+2}^*) = \| f(x) - P_n^*(X_{n+2}^*; x) \| \leq \| f - p \| \quad \forall p \neq p_n^*$$

Επιπλέον αν $X_{n+2} \in X_n$ τότε:

$$E_n(f; X_{n+2}) = \| f - P_n^*(X_{n+2}) \| = \min_{p \in P_n} \max_{x \in X_{n+2}} | f(x) - P_n(X_{n+2}; x) | \leq$$

$$\leq E_n(f; X_m) = E_n(f; X_{n+2}^*) = \| f - P_n^* \|$$

Για την εύρεση της β.ο.π. της $f$ στο $X_m$ στο $P_n$ παίρνουμε $\binom{m}{n+2}$ διαφορετικά σύνολα σημείων το $X_m$, $X_{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, \binom{m}{n+2}$.

Το $X_{n+2}^*$ που θα δίνει την β.ο.π., θα είναι εκείνο από τα $X_{m,i}$ που δίνει το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα.

$X_{4,2} = \{-1, 0, 2\}$

$w'(-1) = (-1-0)\cdot(-1-2) = 3$

$w'(0) = (0+1)(0-2) = -2$

$w'(2) = (2+1)\cdot(2-0) = 6$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{0}{-2} + \frac{4}{6}}{\frac{-1}{3} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{6}} = -1$$

$X_{4,3} = \{-1, 1, 2\}$

$w'(-1) = (-1-1)(-1-2) = 6$

$w'(1) = (1-(-1))\cdot(1-2) = -2.$

$w'(2) = (2+1)\cdot(2-1) = 3.$

$$\lambda_3 = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{-2} + \frac{4}{3}}{\frac{-1}{6} + \frac{1}{-2} + \frac{-1}{3}} = -1$$

$X_{4,4} = \{0, 1, 2\}$

$w'(0) = (0-1)\cdot(0-2) = 2$

$w'(1) = (1-0)\cdot(1-2) = -1$

$w'(2) = (2-0)\cdot(2-1) = 2$

$$\lambda_4 = \frac{\frac{0}{2} + \frac{1}{-1} + \frac{4}{2}}{\frac{-1}{2} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1 | 0 | 1 | 4 |

$$P(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{w(x)}{x-x_i}\cdot\frac{f(x_i)}{w(x_i)} = (x-1)\cdot(x-2)\cdot\frac{1}{6} + (x+1)\cdot(x-2)\left(-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ (x+1)\cdot(x-1)\cdot\frac{3}{4}.$$

$$\ell_3(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{w(x)}{x-x_i} \cdot \frac{(-1)^i}{w'(x_i)} =$$

$$= (x-1)\cdot(x-2)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + (x+1)(x-2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (x+1)(x-1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$p^*(x) = q(x) = p(x) - \lambda \cdot \ell_3(x) = p(x) + \ell_3(x) =$$

$$= -(x+1)\cdot(x-2) + (x+1)(x-1) = x+2-1 = x+1$$

$$e(-1) = 1-(-1+1) = 1$$

$$e(0) = 0-(0+1) = -1$$

$$e(1) = 1-(1+1) = -1$$

$$e(2) = 4-(2+1) = 1$$

## Εύρεση β.ο.π. με προσδιοριστέους συντελεστές

Έστω $P_n^*$ είναι η β.ο.π. της $f$ ορισμένης στο $X_{n+2}$ στο $P_n$

$$p_n^* = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$e(x_i) = f(x_i) - P_n^*(x_i) = \lambda \cdot (-1)^i \quad , x_i \in X_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (-1)^1 \cdot \lambda + a_0 + x_1 \cdot a_1 + x_1^2 a_2 + \dots + x_1^n a_n = f(x_1) \\ (-1)^2 \lambda + a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \dots + x_2^n a_n = f(x_2) \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \lambda + a_0 + x_{n+2} a_1 + x_{n+2}^2 a_2 + \dots + x_{n+2}^n \cdot a_n = f(x_{n+2}) \end{array}\right\} X \cdot a = \hat{f}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ -1 & 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} & 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \dots & x_{n+2}^n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n+2}) \end{bmatrix}$$

Ο $X$ είναι πίνακας τύπου Vandermonde $(\det(X) \neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ έχει μοναδική λύση.

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1 | 0 | 1 | 4 |

, $X_{4,3} = \{-1, 1, 2\}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Άρα $a^T = [-1 \quad 1 \quad 1]$ Άρα $\lambda = -1$

$p^*(x) = x + 1$